La guía de un conocedor del universo

por Bruce Director

Aunque todos los seres humanos tienen la bendición de pasar la eternidad en el universo, algunos desperdician su parte mortal en la ilusión de que están en alguna otra parte. Estos presuntos “forasteros” cobran una fe obsesiva en un mundo de fantasía cuya naturaleza está determinada por los supuestos axiomáticos *a priori* de la predilección del iluso, y por una insistencia en que cualquier prueba experimental que contradiga esos axiomas ha de ignorarse o, de tener que reconocerla, determinarse que habita “fuera” de su mundo. Típico de tales creencias son las nociones de la geometría euclidiana, el empirismo, el positivismo, el existencialismo o ésa que es la patología más perniciosa que aflige hoy a nuestra cultura: el sesentiocherismo.

Como es inevitable que quienes padecen esta enfermedad mental experimentarán ocasiones (al menos una de seguro, aunque es probable que muchas) en las que enfrenten la falsedad de sus creencias, la disección de sus fantasías les proporciona pruebas clínicas relevantes a los psicopatólogos. Aunque el estudio de tales patologías es fundamental para identificar la enfermedad, su tratamiento y prevención exigen un concepto positivo de salud. De esta manera, el desarrollo continuo de la condición humana exige la feliz investigación del mundo real para cuya habitación se diseñó a los seres humanos. Como la historia del dominio creciente de la humanidad en y sobre el universo demuestra, ésa es su inclinación natural. Por suerte, como pusieron de relieve Platón, Nicolás de Cusa, Godofredo Leibniz y Johannes Kepler, el universo se creó para esto, porque la cognición es un principio generalizado y eficiente *en* el universo. Más aun, el universo entero obra en cada parte infinitesimal que es sujeta del entendimiento y la acción de la mente humana.

El enfoque más avanzado para tal investigación del universo “desde dentro” lo estableció Bernhard Riemann en su famosa disertación de habilitación de 1854. Siendo tan revolucionario como antiguo, Riemann insistió en recobrar la cordura *pre*euclidiana al exigir que la ciencia dejara de aceptar los sistemas axiomáticos y se fundara únicamente en las hipótesis que genera la investigación de principios físicos. El problema que Riemann encaró fue que, por más de dos mil años, a los científicos se les había adoctrinado para aceptar seudosistemas (tales como la geometría euclidiana) como el andamiaje necesario sobre el que debía erigirse la ciencia, ya fuera como la forma aceptada, pero considerada falsa, de expresar un descubrimiento verdadero o, como en el caso del aristotelismo, la forma real del conocimiento humano. Riemann reconoció, al igual que su auspiciador en este proyecto, Carl F. Gauss, y el padrino de éste, Abraham G. Kästner, que ya fuera como un medio de expresión o como la adopción de una creencia en realidad falsa, los dogmas de corte aristotélico y euclidiano eran obstáculos que aprisionaban a la mente en un mundo falso, limitándola a sólo poder asomarse, con impotencia, a lo que la víctima creyera ser un mundo externo real.

Por consiguiente, para que la ciencia progrese tiene que romperse esta distinción. No *existe* un afuera. *Existe un universo autolimitado cuyo desarrollo progresivo se caracteriza por una tendencia antientrópica hacia estados de organización y existencia superiores, el cual puede conocerse desde dentro mediante los poderes cognoscitivos que encarna la mente humana. Para la ciencia moderna, la forma apropiada de expresión de esta realidad física se funda en el concepto de un tensor riemanniano.*[1]

En ocasión de su disertación de habilitación, Riemann elaboró el método que debe seguir esta ciencia del conocedor. Al hacerlo, le dio voz a la forma verdadera de descubrimiento que subyace en cada avance de la ciencia, desde los antiguos descubrimientos asociados con la ciencia egipcio–pitagórica de la *esférica,* hasta los logros entonces frescos de Gauss en la astronomía, la geodesia, el geomagnetismo, la electrodinámica y la epistemología. Pero fue más allá, al generalizar a un grado nunca antes logrado este método cuyas implicaciones cabales sólo hasta ahora ven la luz con los descubrimientos de LaRouche en el dominio de la ciencia de la economía física, y con la elaboración de dichas ideas a través del proyecto de investigación de animaciones económicas que un equipo de jóvenes pensadores del Movimiento de Juventudes Larouchistas (LYM) está llevando a cabo al presente, bajo la

1. Lyndon H. LaRouche añadió el siguiente aspecto a destacar:

“Lo que necesita subrayarse es la distinción decisiva entre la presentación acostumbrada del tensor, desde un punto de vista matemático formalista, y su definición, en tanto concepto físico, desde la perspectiva de la antientropía física.

“La intención del tensor riemanniano, en tanto concepto físico, es representar un principio de desequilibrio antientrópico: la característica real del universo físico.

“Así, el concepto del tensor riemanniano no parte de la formalidad matemática a la realidad física, sino, más bien, superpone el concepto de antientropía física al mero esquema matemático.

“Piensa, por ejemplo, en la generación del sistema solar de Kepler, en la armonía del mundo, desde un sol solitario que gira a gran velocidad. Al universo lo mueve un concepto ontológico de antientropía universal; eso es lo que muestran las pruebas experimentales. El concepto matemático tiene que supeditarse a la realidad físico–experimental característica.

“¡Desde allí acecha la trampa para osos, esperando atrapar al formalista matemático!”

Bernhard Riemann aportó el enfoque más avanzado para investigar el universo "desde dentro". Galaxia M81. (Foto: NASA).

dirección personal de LaRouche.

Sin embargo, el contraataque siempre persiste. Tan pronto como el sonido de las palabras de Riemann se apagó, su método estuvo bajo ataque. Al principio dicho ataque cobró la forma de un silencio frío. Tras la muerte prematura de Riemann adoptó una forma más sofisticada. Aunque sus estudiantes y colaboradores siguieron animando sus ideas, sus enemigos trataron de sofocar su programa con un sistema de formalismo matemático, del que es típica la presentación del tratado de Luther Pfahler Eisenhart de 1926, *Geometría riemanniana.*[2] El problema con tratamientos tales como el de Eisenhart no es el uso de fórmulas matemáticas como tal (Riemann mismo empleó ciertas expresiones formales), sino la sustitución de las ideas propias de Riemann por expresiones formales. Al hacer esto, los enemigos de Riemann lograron, al menos en parte, imponer una nueva forma de dogma euclidiano bajo la guisa de un formalismo neoeuclidiano al que con malicia se llamó "geometría riemanniana". Como el efecto de esta sofistería ha llevado ahora a la ciencia y, en un sentido más amplio, a toda la sociedad a un momento de ruptura, es necesario revivir el enfoque verdadero de Riemann. El primer paso es ubicar el descubrimiento de Riemann en el proceso histórico en el cual aún se desenvuelve.

De Brunelleschi a Kepler

Para gran desánimo del sacerdocio babilónico del que manan los dogmas de Euclides y Aristóteles, la mente humana puede *reconocer y actuar* sobre principios físicos universales *sin* recurrir al formalismo matemático. Los propios *Elementos* de Euclides dan fe, de mala gana, pero de modo definitivo, de este hecho. Ninguno de los descubrimientos de los que informan los *Elementos* de Euclides se descubrieron ni pudieron descubrirse con el método deductivo que empleó. Como se da cuenta pronto cualquiera que haya intentado recrear en realidad por sí mismo esos descubrimientos, de los que allí se informa sólo pueden recrearse en un orden inverso, empezando con la construcción física de los cinco sólidos regulares en tanto consecuencia de la acción esférica, siguiendo con el desarrollo de las magnitudes inconmensurables, las proporciones y los números, y, por último, con la construcción de las figuras planas. Es más, el defecto devastador de los *Elementos* de Euclides lo encarna la característica que los aristotélicos consideran su atributo más viable: el método deductivo.

Dicho defecto, como lo pusieron de relieve Kästner, Gauss y Riemann, queda al descubierto en la dependencia que tienen los *Elementos* de la validez del postulado de las paralelas, una proposición que no puede demostrarse dentro del sistema deductivo al que éstos están sujetos. Como afirmó Gauss, sin el postulado de las paralelas no existen triángulos similares, y sin triángulos similares todos los teoremas de la geometría euclidiana fallan. Pero, como también hizo hincapié Gauss, el postulado de las paralelas supone algo que no se expresa en ningún lado: que el universo físico se extiende de manera rectilínea a infinito o, como dirían Gauss y Riemann, que es plano.[3]

Aunque los avances de la ciencia griega en las generaciones posteriores a Euclides (de manera más notable los logros de Arquímedes, Eratóstenes y Aristarco) se derivan del enfoque *pre*euclidiano asociado con la astrofísica que los egipcios y los pitagóricos denotaron como la *esférica,* el dominio relativo de esta forma más cuerda de ciencia empezó a desvanecerse con el asesinato de Arquímedes a manos de soldados romanos en aproximadamente 212 a.C. El dominio relativo de la geometría euclidiana que siguió (con la decadencia cultural relacionada de Imperio Romano que en tan alta estima tenía el Edward Gibbon de lord Shelburne) culminó en 1436, con el éxito de Brunelleschi en completar la cúpula autoestable, sostenida por sí misma, de la iglesia de Santa María del Fiore en Florencia. De entonces a la fecha, la cúpula de Brunelleschi se yergue como un recordatorio desafiante de que el universo real no es plano, como dirían los euclidianos, sino que lo determinan principios físicos que Gauss y Riemann más tarde expresarían como curvatura física (del modo que desarrollaremos a más cabalidad a continuación).

Como puso de relieve LaRouche en 1988, para sorpresa de

2. *Riemannian Geometry* (Geometría riemanniana), de Luther Pfahler Eisenhart, (Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press, 1926).

3. Ésta, por supuesto, es una característica de toda sofistería. El sofista miente, pero nunca explica de modo explícito sobre qué está mintiendo.

muchos entonces, el principio que Brunelleschi reconoció y empleó en la construcción exitosa del domo fue el de la acción mínima que expresa la catenaria; un principio que no se elaboró del todo hasta que vino Leibniz, más de doscientos años después. Sin embargo, lo que demuestra el logro de Brunelleschi es que la mente humana es capaz de reconocer, transformar y comunicar el conocimiento de principios físicos sin reducirlos nunca a una construcción matemática formal. Luego, cuando Leibniz demostró que el principio físico que subyace en la catenaria puede caracterizarse con una función de funciones logarítmicas, le dio una forma matemática a esa expresión. Empero, la expresión matemática del descubrimiento de Leibniz no es el principio; es una afirmación *rigurosamente irónica* de la naturaleza trascendental del principio de la catenaria, una afirmación precisa de una ambigüedad matemática a partir de la cual puede recrearse de nuevo en la mente del científico el principio descubierto por Leibniz.[4]

El principio universal que ejemplifica la proeza de Brunelleschi, lo elaboró Nicolás de Cusa a la sombra de su recién construida cúpula. En *De docta ignorantia,* entre otros apartados, Cusa insistió, *con bases epistemológicas,* que la característica de la acción en el universo físico no es constante, sino que siempre cambia de manera no uniforme. Esto significó que, en contraposición a los aristotélicos, la acción física no se ajustaba a lo que era conveniente en lo matemático: los círculos perfectos. En cambio, Cusa demostró que la no uniformidad de la acción física es una característica de la *autoperfectibilidad* del universo, que es una condición más perfecta que la esterilidad estática invariable de un universo gobernado por los círculos perfectos de Aristóteles. Más aun, como la creatividad humana es fundamental para la autoperfectibilidad del universo, la mente es capaz de descubrir, *desde el interior del universo en desarrollo,* los principios subyacentes que lo rigen.

La obra de Cusa reintrodujo en la ciencia el requisito de identificar y medir un principio físico por la característica de cambio que expresa su acción en el mundo físico, una característica a la que Gauss y Riemann luego se referirían como *curvatura.* La primera aplicación de esto, y quizás la más impresionante, fue el descubrimiento de Kepler del principio de la gravitación universal.

Al momento, un equipo de investigadores del LYM lleva a cabo una reelaboración pedagógica del descubrimiento de Kepler, como lo detalló en su *Nueva astronomía* de 1609, pero es necesario un breve resumen de los aspectos pertinentes para esta exposición.

Kepler rechazó el precepto aristotélico de que el conocimiento del mundo físico ha de confinarse al dominio de la percepción sensorial, y que los principios que gobiernan el movimiento físico deben relegarse a lo que para ellos era un dominio metafísico en última instancia inescrutable e invariable. Para los astrónomos aristotélicos, esto planteó un problema particularmente irritante, porque los movimientos planetarios completos se extienden más allá del campo de visión del observador, y las causas de dicho movimiento rebasan por completo la comprensión sensual y (para el aristotélico) intelectual del astrónomo. Por consiguiente, los astrónomos del período romano repudiaron cualquier conocimiento veraz del movimiento planetario, y fijaron descripciones matemáticas de sus especulaciones sobre cómo debían de ser esos movimientos, de poderlos percibir de manera directa.

Esta visión concordaba perfectamente con la opinión feudal imperante de que el hombre mortal era, a lo más, una bestia sofisticada cuyos poderes cognoscitivos yacían fuera y carecían de trascendencia en el universo "real", mismo que los aristotélicos imaginaban falsamente como gobernado por un conjunto fijo de leyes eternas invariables. Como tal, el hombre mortal, afirmaba la opinión aristotélica, debía regirse por las leyes en apariencia caóticas del comportamiento animal, sin recurrir a principios universales eternos que, ellos insistían, no cambiaban.[5] Pero, siendo un adepto declarado de Cusa, Kepler se percató de que esta visión del hombre y el universo estaba equivocada. El hombre, mediante sus poderes cognoscitivos, puede conocer las normas rectoras del universo en tanto *principios de cambio,* como recalcaron Heráclito y Cusa. Por ende, Kepler entendió los movimientos de los planetas y la investigación de los mismos por parte del hombre como parte de una *sola creación en autodesarrollo que se desenvuelve,* y que incluye la evolución de la vida y la cognición humana. El hombre mortal no está afuera del universo, ni éste lo está de la esfera de acción del primero. En cambio, el hombre mortal, dueño del poder de la cognición, trasciende la mortalidad al desempeñar una función única e integral en el desarrollo eterno continuo del universo entero.

En consecuencia, insistía Kepler, el mejor lugar para descubrir los principios del movimiento planetario no es afuera, sino dentro del universo:

> Porque como el Sol en su revolución sobre su propio eje mueve a todos los planetas por la emanación que de sí desprende, así también la mente, como nos dicen los filósofos, al entenderse ella misma y todo lo que

4. Una vez establecido de esta forma irónica, puede elaborarse un medio de cálculo. Como indican la formulación de Napier de los logaritmos, el cálculo de Leibniz de π o el desarrollo de Gauss de las series hipergeométricas, tales medios de cálculo han de expresar las ambigüedades intrínsecas de la forma irónica original. Esto difiere de los modernos procesadores digitales, que sustituyen el pensamiento real con rápidas reiteraciones de fuerza bruta.

5. Uno ve hoy el restablecimiento de este concepto feudal del universo en creencias populares tales como la llamada interpretación Copenhague de la mecánica cuántica o las formas radicales de la teoría de la información asociadas con Norbert Wiener, John von Neumann y demás, que insisten que, en lo fundamental, el universo es aleatorio y no ofrece ninguna posibilidad de que el hombre comprenda otra cosa que no sean descripciones estadísticas. Este razonamiento era el meollo de la famosa correspondencia entre Einstein y Born. Ver *The Born-Einstein Letters* (Las cartas de Born y Einstein. Nueva York: Macmillan, 2005) y "On the 375th Anniversary of Kepler's Passing" (En el 375 aniversario de la muerte de Kepler), por Bruce Director, que es la entrega 65 de la serie *Riemann a contraprueba de tontos* (www.wlym.com).

contiene, estimula el uso de la razón, y al tender y desenvolver su simplicidad hace comprensibles todas las cosas. Y tan estrechamente unidos y enlazados unos a otros están los movimientos de los planetas alrededor del Sol y los procesos de la razón, que si la Tierra, nuestro hogar, no recorriera su circuito anual en medio de las demás esferas, cambiando de un lugar a otro, de una posición a otra, la razón humana nunca habríase esforzado por conocer las distancias del todo verdaderas de los planetas ni las otras cosas que dependen de ellas, y nunca hubiera establecido la astronomía.[6]

En sí, rechazó los modelos matemáticos del movimiento planetario que habían postulado Ptolomeo, Copérnico y Tico Brahe. Aunque cada modelo era radicalmente diferente, los tres pretendían describir el movimiento de los planetas —que de manera experimental se había determinado no era uniforme— ajustando las estadísticas de las observaciones a círculos perfectos definidos en términos matemáticos. Kepler se esmeró en demostrar en la introducción de la *Nueva astronomía,* que semejantes métodos estadísticos no podían determinar la verdad, pues los tres modelos arrojaban prácticamente el mismo resultado estadístico. A esto los protagonistas, Ptolomeo, Copérnico o Brahe, no podían objetar nada, ya que los tres aceptaban la creencia aristotélica de que el formalismo matemático era la única forma cierta de conocimiento.

Pero, para Kepler, las hipótesis sobre las causas físicas verdaderas son la única forma de conocimiento. Por tanto, procedió a demostrar que hay una anomalía inherente a las interpretaciones estadísticas de Ptolomeo, Copérnico y Brahe, que refleja la existencia de un principio físico que ninguno de sus tres sistemas considera. Como el postulado de las paralelas para los *Elementos* de Euclides, la anomalía de Kepler no puede detectarse con los métodos de Ptolomeo, Copérnico y Brahe, y ninguna manipulación de sus sistemas matemáticos respectivos puede eliminarla. Sin embargo, una vez identificada, tiene que rechazarse el sistema o adoptarse su locura.

El supuesto subyacente de los tres modelos era la insistencia aristotélica en que el movimiento de un cuerpo material no puede causarlo un principio inmaterial, sino algo dentro del cuerpo mismo. Por consiguiente, los aristotélicos vieron la órbita planetaria como el artefacto del planeta. Como el movimiento al parecer no uniforme del planeta a lo largo del arco de su órbita se desviaba de la supuesta perfección del movimiento circular uniforme, Ptolomeo, Copérnico y Brahe buscaron algún punto (ecuante) en torno al cual el planeta atravesaría arcos iguales en el transcurso de su órbita. Kepler demostró, de modo exhaustivo, que no existe tal punto. No importa cuán hábilmente tratara uno de manipular las estadísticas con respecto a los modelos de Ptolomeo, Copérnico y Brahe, seguía habiendo una discrepancia.

Kepler concluyó que dicha discrepancia no era una aberración estadística; era una cuestión de principio. Para Kepler, la órbita del planeta no es la estela de su movimiento; más bien, la órbita la determina la *causa física* que hace que el planeta se mueva. Esa causa, insiste Kepler, es un principio físico (la gravitación) que impregna el universo. Según este principio, existe una conexión entre el Sol y los planetas en lo individual (caracterizada por el recorrido de áreas iguales en tiempos iguales), y entre el Sol y todos los planetas de forma colectiva (caracterizada por las relaciones armónicas entre las velocidades mínima y máxima de los planetas). Las estadísticas de las observaciones eran, para Kepler, las simples huellas del principio. Una vez identificado el principio, las huellas podían explicarse.

Así, para Kepler, al movimiento no uniforme del planeta lo guían las características armónicas de todo el sistema solar a cada intervalo infinitesimal. Estos principios armónicos definían la órbita del planeta como lo que Leibniz luego llamaría una trayectoria de acción mínima del sistema solar. En otras palabras, los planetas no se mueven en una de muchas órbitas infinitamente posibles en un espacio de otro modo vacío. Más bien, se mueven en trayectorias de acción mínima definidas de manera única por las características armónicas del sistema solar. Desde la perspectiva del planeta, Kepler recalcó que dicha trayectoria es una línea recta. Lo "recto", como Gauss insistiría después, lo establecen consideraciones físicas, no matemáticas *a priori.* La mente humana juzga estas consideraciones físicas como las características de cambio de un principio físico. Gauss y Riemann expresarían después esa característica de cambio como la noción de *curvatura física.*

La curvatura física; de Leibniz a Gauss

La astronomía física que Kepler revolucionó exigía un cambio completo en las matemáticas imperantes, que está muy lejos del estado actual de la ciencia. En tanto que Kepler hizo que la física avanzara y demandó la creación de una nueva matemática congruente con ella, el sistema de revisión por pares insiste hoy en lo contrario: no se permite ningún descubrimiento físico en el templo, a menos que se plantee en términos de la matemática ya existente.

Al demostrar que la acción física es de veras no uniforme, Kepler tuvo que enfrentar el problema de cómo medir el movimiento del planeta como una función del efecto cambiante del principio de la gravitación. Esto requería el desarrollo de unas nuevas matemáticas que pudieran expresar la posición como una función del cambio, en vez de denotar éste como una mera diferencia de posición. Kepler señaló la dirección que debían tomar las nuevas matemáticas, y exigió que futuros científicos la desarrollaran.

Especificó que todo el sistema solar debía considerarse como la unidad de acción, y que, de conformidad, el movimiento del planeta en cualquier momento había de medirse como una función de las características armónicas de todo el sistema solar. Tales características armónicas, como lo

---

6. *The Harmony of the World* (La armonía del mundo), de Johannes Kepler (Filadelfia: Sociedad Filosófica Estadounidense, 1997), pág. 496.

reflejan la función de los cinco sólidos platónicos y las proporciones que corresponden a los intervalos musicales entre las velocidades mínima y máxima de los planetas, determinan el número y las posiciones de las órbitas planetarias. En cada órbita, el movimiento del planeta se medía con respecto a la órbita entera. De modo que existe una relación mutuamente inversa entre el efecto momentáneo de la gravedad sobre el planeta, y el efecto total de lo que Gauss después llamaría el potencial gravitacional del sistema solar en su conjunto.

Leibniz generalizó este concepto de Kepler al introducir la noción del infinitesimal como la expresión del efecto penetrante, *aunque siempre cambiante,* de un principio universal en cada rincón del espacio–tiempo físico. Él expresó la relación inversa entre las expresiones infinitesimal y universal de dicho principio como las respectivas formas diferencial e integral del cálculo. El *cálculo infinitesimal* de Leibniz es el único cálculo verdadero. Los fraudes de Newton y Cauchy no son más que sofisterías burdas dirigidas a eliminar el significado metafísico del concepto físico de Leibniz del infinitesimal. Aunque los formalismos sin infinitesimal de Newton, Cauchy y su prole quizás le interesen a matemáticos puros, quienquiera que procure entender algo sobre el universo físico regresa, de forma consciente o inconsciente, a alguna forma del concepto de Leibniz. La potencia o debilidad relativa de un científico la refleja en parte el grado al que es implícita o explícitamente consciente de la superioridad del método de Leibniz.

En lo primordial, el enfoque de Leibniz para el cálculo lo detallan sus propios escritos y los de su colaborador, Johann Bernoulli, y los he abordado antes, en términos pedagógicos, en apartados de la serie *Riemann a contraprueba de tontos* (visite www.wlym.com). Por motivos que atañen a esta exposición pedagógica, el cálculo de Leibniz y Bernoulli se examinará mediante el ejemplo de su aplicación a la catenaria, desde la óptica de su desarrollo posterior por Gauss y Riemann.

La catenaria es el ejemplo decisivo de la veracidad metafísica del cálculo de Leibniz. Ningún intento previo, de manera más notable el de Galileo, logró explicar la forma de la catenaria a partir de consideraciones matemáticas. Fue sólo a través de la aplicación de su cálculo a las características físicas de la cadena suspendida, que Bernoulli y Leibniz lograron revelar el principio metafísico subyacente de la catenaria.[7]

Tanto Leibniz como Bernoulli reconocieron que la forma que cobra una cadena suspendida de grosor uniforme refleja el efecto físico de aplicar una tensión a lo largo de un potencial gravitacional. Por tanto, rechazaron cualquier intento de explicar la catenaria suponiendo que era una "curva" en un espacio euclidiano de otro modo vacío y plano. En cambio, consideraron la forma de la curva como expresión de la interacción cambiante no uniforme entre la gravedad y la tensión. Esto puede confirmarse con los experimentos que Bernoulli especifica en su texto sobre cálculo integral o con los que miembros del LYM han usado en presentaciones pedagógicas.[8] Cualquiera que realice estos experimentos reconocerá un cambio en la dirección de la cadena, de un punto al siguiente, como el efecto físicamente determinado de la relación cambiante entre la gravedad y la tensión. Así, la curvatura de la cadena no es una desviación arbitraria de la rectitud euclidiana; es la expresión de una característica física determinada mediante experimento.

Sin embargo, es importante destacar que la curvatura, en este sentido, no es un objeto matemático, sino una expresión matemática de una característica físicamente determinada de la que se derivan las relaciones métricas de la catenaria. Éstas las expresa la relación funcional entre la longitud de la cadena en un intervalo dado, y la curvatura cambiante en el mismo intervalo. En el caso de la catenaria, esta relación la expresa, en términos matemáticos, la ecuación diferencial de Bernoulli que representa la longitud de la cadena como una función del efecto cambiante de la gravedad sobre la tensión.[9]

Al igual que una órbita planetaria, la catenaria muestra una curvatura total que cobra expresión en la forma general de la cadena suspendida.[10] También como en la órbita planetaria, la curvatura cambia de manera diferente en cada parte infinitesimal. Esta curvatura infinitesimal es una expresión de la acción de un principio físico que actúa de modo tangencial sobre la cadena física, como si lo hiciera sobre el mundo visible desde afuera; aunque afuera del mundo visible no significa fuera del universo. Por consiguiente, al determinar esta expresión infinitesimal, el hombre puede descubrir, desde el interior de un proceso físico, los principios que lo gobiernan desde fuera del dominio visible. La curvatura infinitesimal puede medirse, como propuso Leibniz, por el inverso del radio del círculo osculatriz en ese punto (ver **figura 1.**). No obstante, dicha curvatura también puede medirse desde el interior de la cadena, por así decirlo, por el efecto cambiante de la interacción entre la gravedad y la tensión sobre ella, medido por experimento, como lo especifican las funciones diferenciales de Leibniz y Bernoulli.

Una investigación más profunda del universo físico exige,

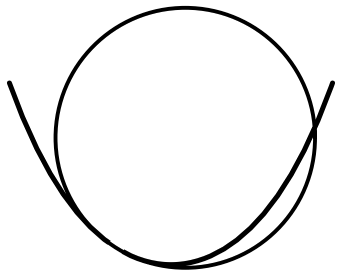
---

7. Ver *Die Erste Integralrechnung* (1691), de Johann Bernoulli (http://historical.library.cornell.edu/math/index.html); "Two Papers on the Catenary Curve and Logarithmic Curve" (Dos trabajos sobre las curvas catenaria y logarítmica), en el *Acta eruditorum* (1691) de Godofredo W. Leibniz (revista *Fidelio,* www.schillerinstitute.org); y "Justice for the Catenary" (Justicia a la catenaria), en la entrega 10 de la serie *Riemann a contraprueba de tontos* (www.wlym.com), y "La larga vida de la catenaria, de Brunelleschi a LaRouche" (*Resumen ejecutivo* de la 1ª quincena de julio de 2004), ambos por Bruce Director.
8. Ver el recuadro 12 de "El principio del 'poder' ", por Lyndon H. LaRouche, en *Resumen ejecutivo* de la 2ª quincena de febrero y 1ª de marzo de 2006 (vol. XXIII, núms. 4–5) y en www.larouchepub.com/spanish.

9. Ver el ejercicio pedagógico del LYM en Boston sobre la catenaria.
10. Leibniz, *op. cit.* Leibniz demostró que esto es la media aritmética entre dos funciones exponenciales, un hecho con implicaciones metafísicas enormes.

empero, poder descubrir desde dentro los efectos de muchos principios que actúan juntos en un solo lugar en el espacio–tiempo físico. Esta noción de curvatura "intrínseca" queda más clara cuando se entiende desde la perspectiva desde la cual Gauss la desarrolla en su famoso tratado sobre superficies curvas.[11] Gauss se había enfrascado en hondas investigaciones físicas sobre geodesia, geomagnetismo y astronomía, tales como su determinación de la órbita de Ceres, y de la forma de la Tierra y de la naturaleza de su campo magnético. Como la determinación de Kepler de los principios del movimiento planetario, todas estas investigaciones exigían precisar principios físicos desde dentro. Para Kepler, esto implicó definir el movimiento de los planetas desde uno de ellos (la Tierra), que también se movía según los mismos principios que Kepler trataba de descubrir. Pero Gauss tenía otro problema. Mientras que la labor de Kepler se benefició de un gran número de observaciones repartidas con amplitud, Gauss trabajó con unas pocas mediciones relativamente infinitesimales. Esto impulsó a Gauss a desarrollar una forma ampliada del cálculo de Leibniz, en la que investigó la relación entre las características físicas globales y su expresión en lo infinitesimalmente pequeño. Desde entonces, ese enfoque se conoce como geometría diferencial.

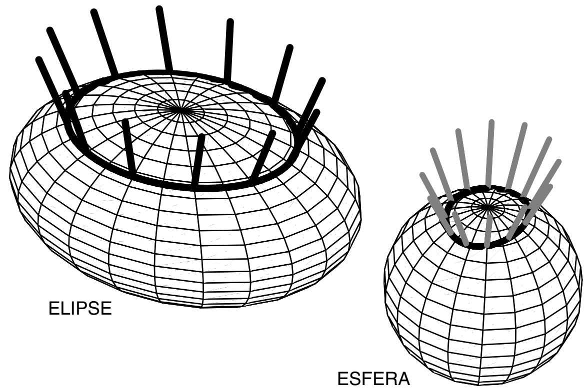
FIGURA 1
Círculo osculatriz



Tales superficies determinadas en términos físicos, insistía Gauss, no han de considerarse como objetos curvos de otro modo empotrados en un espacio euclidiano plano tridimensional, sino como lo que Riemann luego llamaría multiplicidades doblemente extendidas. Este concepto, aunque nuevo para Gauss en esta forma, se remonta a uno que Kepler menciona en el segundo capítulo de *Mystérium cosmográphicum.* En referencia al acento que Cusa le da a la importancia epistemológica de la diferencia entre lo curvo y lo rectilíneo, Kepler distingue entre el globo, que es una esfera enclavada en un espacio tridimensional, y una esfera, a la que considera como la simple superficie. El primero, subraya Kepler, es una mezcla de curvo y recto, en tanto que la segunda es pura curvatura.

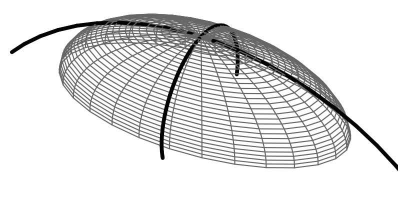
En congruencia con esta visión de Kepler, Gauss también proscribió el supuesto de lo plano de la geometría euclidiana en su investigación de las superficies curvas, y consideró que a las superficies las determina su pura curvatura. Adoptando

FIGURA 2
Mapa de Gauss con normales paralelas



un método de la astronomía y la geodesia, Gauss midió la curvatura de la superficie al registrar las direcciones cambiantes de las normales de la superficie de una esfera (ver **figura 2**).[12] Entre más curvas las áreas correspondientes de las superficies, más grandes las áreas de los mapas esféricos resultantes (llamados mapas de Gauss), y viceversa. Gauss llamó al área total del mapa esférico curvatura total o integral de esa región de la superficie. Sin embargo, dentro de esa región la curvatura podría variar mucho de un lugar a otro. Así, fue necesario que Gauss desarrollara un concepto de medición local o infinitesimal de la curvatura en cada punto dentro de esa región. Él definió esto como la proporción entre cada área infinitesimalmente pequeña de la superficie y el área infinitesimalmente pequeña correspondiente del mapa de Gauss. Mostró que esta cantidad también podía medirse por el inverso del producto de multiplicar los radios de los círculos osculatrices por las curvas de curvatura mínima y máxima en ese punto (ver **figura 3.**). A partir de estas dos mediciones, las curvaturas integral y local, Gauss podía cuantificar las características de la superficie en lo grande y las cambiantes en lo pequeño.

FIGURA 3
Medición de la curvatura de superficie



Para medir así la curvatura de una superficie, es necesario verla desde el exterior, como si estuviera empotrada en un

11. *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1828), de Carl Gauss, en *Werke,* vol. IV.

12. En astronomía y geodesia, la normal es el perpendículo y la esfera es la esfera celeste.

FIGURA 4
Geodésicas desde un punto

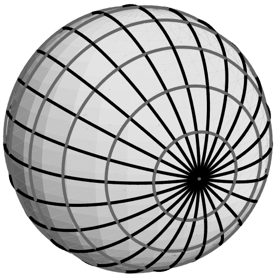


FIGURA 5
Geodésicas con curvas ortogonales

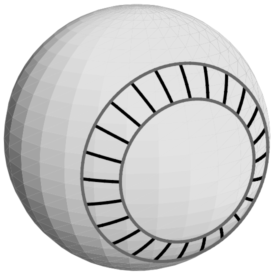
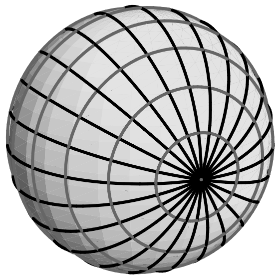


FIGURA 6
Coordenadas geodésicas



espacio dimensional superior.[13] No obstante, Gauss, al igual que Cusa, Kepler y Leibniz, se percató de que en la ciencia real uno tiene que ser capaz de medir la curvatura física desde dentro, como lo hizo al determinar la órbita de Ceres y la forma de la Tierra o las características de su campo magnético. Esto implicaba poder determinar desde dentro de la superficie cómo ésta cambia en lo infinitesimalmente pequeño. Para ello, Gauss se apoyó en una aplicación del principio de acción mínima de Leibniz que, en el caso de las superficies, cobra expresión en el comportamiento de sus líneas más cortas, o sea, las geodésicas.[14] Las características de estas líneas geodésicas, al igual que la catenaria o una órbita planetaria, las define la naturaleza de los principios físicos a partir de los cuales se genera la superficie. De esta forma, su comportamiento expresa dichos principios físicos.

Para esto, Gauss primero demostró que si se extiende un conjunto de curvas geodésicas de igual longitud desde cualquier punto de una superficie, entonces la curva que conecta los extremos de dichas geodésicas será perpendicular a todas ellas (ver **figura 4**). De forma más general, demostró que si se dibuja cualquier curva arbitraria sobre una superficie, y curvas geodésicas de igual longitud perpendiculares a dicha curva arbitraria, la curva que conecta los extremos de las geodésicas también será perpendicular a ellas (ver **figura 5**). Por ende, en cualquier superficie existe un conjunto intrínseco de curvas ortogonales en el que al menos una de ellas es geodésica (ver **figura 6**). Así, Gauss descartó todos los sistemas coordenados *a priori,* tales como el de Descartes, y los remplazó con un conjunto de parámetros que expresaba la naturaleza física de la superficie misma.

A partir de esto, Gauss pudo idear un medio para expresar la longitud de una curva geodésica como una función de la curvatura de la superficie, y viceversa. Dicha longitud podía expresarse como una función de las curvas ortogonales que establecen los parámetros de la superficie mediante una forma general del teorema de Pitágoras (ver **figura 7**). A diferencia de una superficie euclidiana "plana", en la que la relación entre la longitud de la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo es independiente de su posición sobre la superficie, en una superficie curva esa relación cambia dependiendo de su posición. Ese cambio es una función de la curvatura cambiante de la superficie. Por tanto, la función pitagórica general de Gauss, llamada función métrica de Gauss, expresa cómo *cambia* esa relación de un lugar a otro de la superficie, dependiendo de la curvatura *cambiante* (ver **figura 8**). Esto establece una relación funcional determinable

FIGURA 7
Función pitagórica

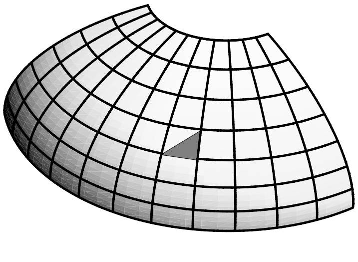
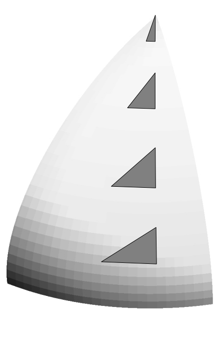


FIGURA 8
Función pitagórica cambiante



---

13. La normal, al ser perpendicular a la superficie, se extiende hacia el espacio que está fuera de la superficie.
14. La investigación de Gauss de las propiedades de las líneas más cortas se remonta a algunas de sus primeras reflexiones sobre la locura de la geometría euclidiana. Uno de los primeros registros en su diario es una observación sobre la definición euclidiana de un plano. Para Gauss, las características de un plano y una línea no podían darse *a priori,* sino sólo como consecuencia de las características físicas (la curvatura) de la superficie.

entre la longitud (métrica) y la curvatura.

Desde un punto de vista físico, esto significó que podía medir la curvatura cambiante de la superficie a partir de los cambios físicamente mensurables en la longitud de las geodésicas con respecto a los parámetros físicos de la superficie. Gauss aplicó este método en su famosa medición de la línea de longitud que va de Gotinga a Altona, a partir de la cual, fundado en una discrepancia de 16″ en el arco, ¡formuló un nuevo concepto de la forma entera de la Tierra!

Sin embargo, la expresión de esta relación entre la longitud y la curvatura era bastante complicada en lo matemático. Por tanto, Gauss también halló una expresión mucho más simple de la relación entre el comportamiento de la geodésica y la curvatura. Reconoció que en el mundo *anti*euclidiano real no hay tal cosa como los triángulos similares. Sobre cualquier superficie curva, la suma de los ángulos de una triángulo formado por las líneas más cortas siempre es mayor o menor que 180°, dependiendo de si la superficie sobre la que ese triángulo existe tiene una curvatura positiva o negativa.[15] Esta diferencia, que Gauss llamó el exceso o defecto angular, es una función del área del triángulo. En una superficie de curvatura positiva, entre más grande sea el área del triángulo, más grande será el exceso angular, hasta llegar a un máximo. En una superficie de curvatura negativa, entre menor sea el área del triángulo, más grande el defecto angular, hasta llegar a un mínimo de cero. La proporción específica entre el exceso y el defecto angulares, y el área, es una función de la curvatura. En una porción de la superficie con más curvatura (por ejemplo, positiva), un triángulo que abarque un área pequeña tendrá un exceso angular mayor que uno que abarque un área parecida en una porción con menos curvatura. Así, la curvatura de una porción de la superficie la expresa la relación cambiante entre el área de un triángulo geodésico y el exceso o defecto angular.

Así que Gauss mostró que la curvatura de una superficie podía medirse por la proporción entre el exceso (o defecto) esférico y el área del triángulo geodésico. Esto le permitió al científico determinar la curvatura característica de la superficie desde la misma, sin considerar la ficción arbitraria del espacio euclidiano ni ningún sistema coordenado cartesiano arbitrariamente fijo u otro.

Aunque las fórmulas que expresan estas relaciones pueden tornarse muy complicadas, Gauss también ideó el modo de hacer sus cálculos, al volver directamente aplicables sus conceptos a los problemas físicos que estaba investigando.

De este modo, Gauss dio los primeros pasos para liberar a la humanidad de la opresión persistente de la geometría euclidiana. Su protegido, Bernhard Riemann, iría más allá.

Un breve interludio sobre el tiempo

Antes de pasar directamente a la contribución de Riemann, es necesario incluir una breve nota sobre el principio de acción mínima, tanto por la integridad científica del argumento presentado, como para arrancar al lector de cualquier dependencia persistente de las nociones *a priori* del tiempo y el espacio. Quizás más porfiado aun que la adhesión a las relaciones espaciales de la geometría euclidiana, sea el apego psicológico a una creencia en la existencia de alguna medida absoluta del tiempo. Como puso de relieve Platón en el *Timeo,* del cual después se hicieron eco, de manera más notable, Filón, Agustín y Cusa, el tiempo no es una cantidad absoluta que mide algún gran reloj de péndulo en el cielo. El tiempo es una relación de cambio. Como lo planteó Platón, *"el tiempo es la imagen móvil de la eternidad".*

Así es como Kepler entendía el tiempo. En vez de medir el movimiento no uniforme del planeta con una medida de tiempo uniforme absoluto (el sol medio), Kepler midió el tiempo con el movimiento mismo del planeta (sol verdadero). Tomó como unidad de tiempo el intervalo único en el cual el movimiento del planeta es el mismo al comenzar y al terminar: la órbita entera. Esas unidades con cantidades iguales de movimiento —es decir, las áreas orbitales iguales— midieron porciones iguales de tiempo. Estas áreas orbitales son relativas a la órbita, no absolutas. De modo que el movimiento del planeta define lo que es el tiempo. Sin movimiento, no hay tiempo.

Algo parecido pasó con el descubrimiento subsiguiente de Fermat de que la luz sigue la trayectoria de menor tiempo.[16] Con la reflexión simple, la trayectoria de la luz es la de la distancia más corta. No obstante, con la refracción, demostró Fermat, su trayectoria es la del menor tiempo. La diferencia entre las dos acciones físicas es que con la reflexión no hay un cambio de medio, en tanto que con la refracción sí lo hay. El cambio de medio cambia las características físicas de la multiplicidad de acción. Dicho cambio físico define un nuevo comportamiento para la trayectoria más corta, o sea, la geodésica. En la reflexión, esa geodésica es la trayectoria de menor distancia. En la refracción, es el menor tiempo. La naturaleza de la luz no cambia, siempre busca la trayectoria más corta; pero cuando las características de la multiplicidad en la que actúa esa luz cambian, la trayectoria más corta pasa de la menor distancia al menor tiempo.

Así, de nuevo, el tiempo no es una cantidad absoluta, sino una característica de cambio de la acción física, un cambio en las características del espacio–tiempo físico.

En el mundo real no existe el tiempo absoluto; existe, como Heráclito, Platón y Cusa pusieron de relieve, el *cambio,* del cual el tiempo es una medida relativa. El medio más eficiente para librarse de la creencia incapacitante en el tiempo absoluto, es reconocer lo obvio: *la única unidad de tiempo absoluto es la eternidad. Todo acto más pequeño sólo forma parte de la eternidad, cuya medida es relativa a la multiplicidad en la que ocurre.*

---

15. Una relación similar existe para cualquier polígono.

16. Ver el recuadro 5 de "El principio del 'poder' ", por Lyndon H. LaRouche, *op. cit.*

Las multiplicidades y los tensores riemannianos

Riemann empezó su disertación de habilitación del 10 de junio de 1854 en la tradición del niñito del cuento de Hans Christian Andersen sobre el emperador desnudo. Afirmó que, aunque los supuestos de la geometría euclidiana se habían aceptado por más de dos mil años, nadie se había tomado la molestia de ver si eran ciertos. Como está determinado por experimento que toda acción física es *anti*euclidiana, Riemann insistió que la consideración futura de los *supuestos a priori* de la geometría euclidiana debían abolirse y proscribirse de la ciencia.

Riemann remplazó el supuesto arbitrario de un espacio euclidiano absoluto con la idea de una multiplicidad física de acción cuyas "dimensiones", como los parámetros de las superficies de Gauss, denotan los principios físicos que actúan en esa multiplicidad. El número de dichas dimensiones no es fijo *a priori,* como las tres dimensiones lineales de la geometría euclidiana, sino que lo determina el número de principios físicos a considerar para expresar a cabalidad la acción física de la multiplicidad.

De modo que Riemann extendió la noción de Gauss de una superficie a una multiplicidad extendida en *n* dimensiones, de la cuál las superficies de Gauss representan el caso especial de una multiplicidad doblemente extendida. Por ejemplo, la trayectoria de la luz en la reflexión puede verse como una geodésica en una multiplicidad simplemente extendida, porque la posición de la luz puede determinarse del todo a partir de un parámetro físico: el ángulo de incidencia. Por otra parte, la trayectoria de la luz con la refracción es una geodésica en una multiplicidad doblemente extendida, porque la presencia del principio adicional exige determinar la posición con respecto a dos parámetros: el ángulo de incidencia y el índice de refracción. De nuevo, no es la luz la que cambia de la reflexión a la refracción, sino la multiplicidad en la que actúa. Ese cambio de los principios físicos que actúan sobre la multiplicidad produce un cambio correspondiente en la característica de la geodésica, de la trayectoria más corta a la de menor tiempo.

En una nota suelta que escribió entre 1852 y 1853, antes de presentar su disertación de habilitación, Riemann ofreció un ejemplo de su concepto de una multiplicidad determinada por principios *físicos,* no por dimensiones geométricas *a priori.*

> El concepto de una multiplicidad de múltiples dimensiones perdura independientemente de nuestra intuición del espacio. El espacio, el plano y la línea son sólo los ejemplos más intuitivos de una multiplicidad de tres, dos o una dimensiones. Aun sin la más mínima intuición, podríamos desarrollar una geometría entera. Quiero explicar esto con un ejemplo:
>
> Supón que quisiera realizar un experimento u observación, y que sólo fuera importante para mí establecer un valor numérico, digamos, el grado de calor. En este caso, todos los resultados posibles podrían representarse por una serie continua de valores numéricos, del infinito positivo al negativo. Pero supón que quisiera determinar dos valores numéricos, digamos, que quisiera hacer una determinación de temperatura y una de peso, entonces los resultados tendrían que condicionarlos dos magnitudes x y y. Aquí sólo obtendría el total de casos si le diera a x y y todos los valores entre el infinito negativo y el positivo, al combinar cada valor de x con cada valor de y. Obtendré un caso único siempre que x tomado junto con y tenga un valor determinado.
>
> Ahora puedo extraer la totalidad de los casos, un complejo de casos; puedo, por ejemplo, establecer la ecuación $ax + by + c = 0$ y juntar ahora todos esos casos en que x y y satisfagan la ecuación; podría llamar a este complejo de casos *línea recta.* A partir de esta definición de una línea recta podría derivar todos aquellos teoremas sobre líneas rectas que ocurren en la geometría. Es claro que uno puede proceder de esta forma sin depender de la más mínima intuición sobre el espacio.
>
> Con esta forma de tratar la geometría o la teoría de las multiplicidades de tres dimensiones, todos los axiomas abordados del modo habitual de tratar las intuiciones espaciales, como por ejemplo, que sólo una línea recta es posible entre dos puntos cualquiera, el primer axioma de Euclides, desaparecen, y sólo los que son válidos para las magnitudes en general, por ejemplo, que el orden de los sumandos es arbitrario, permanecen.
>
> Uno descubre ahora con facilidad cómo, del mismo modo, puede obtener una multiplicidad de dos dimensiones independiente de la existencia de un plano; también cómo puede uno arribar a una magnitud de arbitrariamente muchas dimensiones. Sólo tenemos que hacer observaciones que [. . . conciernan a la determinación de muchas magnitudes numéricas. La oración la completó Heinrich Weber].
>
> Pero también es interesante entender la posibilidad de que este tratamiento de la geometría fuera, no obstante, en extremo infructuoso, pues no encontraríamos ningún teorema nuevo, y lo que se logra de manera fácil y simple mediante la representación del espacio, sólo se convierte en algo complejo y difícil. En general, uno tiene que optar por tomar la dirección contraria y donde uno se topa con la geometría de multiplicidades de más dimensiones, del modo que en el estudio de las integrales definidas en la teoría de las magnitudes imaginarias uno usa la intuición del espacio como una ayuda. Es bueno saber cómo, por medio de esto, uno consigue una panorámica veraz sobre el tema, y sólo por esta vía pueden plantearse directamente los aspectos esenciales.

De esta manera, con el remplazo de las dimensiones euclidianas *a priori* por principios físicos cuyo número y características reflejan las características físicas de una multiplicidad de acción física, le correspondió a Riemann definir cómo expresar la relación funcional entre esos principios, sin recurrir a ningún supuesto *a priori.* La dirección preliminar de esto la dio su disertación de habilitación mediante el desarrollo de su concepto de *"magnitud múltiplemente extendida"*.

La acción en una multiplicidad física extendida en *n* dimensiones, insistía Riemann, debe expresarla la *magnitud extendida en n dimensiones* correspondiente. Semejantes magnitudes *no* expresan un conjunto fijo de relaciones como en la geometría euclidiana. Más bien, las magnitudes extendidas en *n* dimensiones de Riemann expresan las relaciones *dinámicas* entre los principios que determinan la acción física en la multiplicidad.

Un ejemplo elemental es la antigua investigación pitagórica de la línea, el cuadrado y el cubo. Piensa en una línea, un cuadrado y un cubo cuyos segmento, lado y arista respectivos tienen la misma longitud. ¿Son todas estas longitudes la misma magnitud? Desde la perspectiva de la geometría euclidiana o el álgebra formal, la respuesta sería sí. Pero desde la de la geometría física de los pitagóricos, Gauss y Riemann, es un rotundo no. La única magnitud propia del cuadrado es una que exprese la relación dinámica entre la longitud y el área, que los pitagóricos demostraron es inconmensurable con una magnitud lineal. De modo parecido, la única magnitud propia del cubo es una que exprese la relación dinámica entre la longitud, el área y el volumen. Toda relación subyacente se redefine de conformidad con esta magnitud cúbica. Por ejemplo, la relación entre la longitud y el área en una magnitud cúbica es diferente de la que hay entre la longitud y el área en la cuadrada. Como demostraron las construcciones de Platón y Arquitas, a cada objeto lo genera un principio distinto. Cada uno es producto de una multiplicidad física diferente, con un número específico de principios y una curvatura característica distintiva.[17]

Riemann liberó a la ciencia de los efectos incapacitantes de pretender investigar el universo físico usando los relojes y varas de medir arbitrarios del espacio y el tiempo absolutos euclidianos. Una vez liberado, el universo físico mismo designa las magnitudes apropiadas con las que debe medirse. Tal como con la demostración de los pitagóricos de las diferencias entre una línea, un cuadrado y un cubo, la insistencia de Cusa en que lo recto nunca podría medir lo curvo, o el entendimiento de Kepler de que el movimiento del planeta definía el significado del tiempo, el concepto de Riemann de *multiplicidades extendidas en* n *dimensiones que se determinan en términos físicos,* definió una nueva forma de magnitud. Una forma de tales magnitudes extendidas en *n* dimensiones pertinente al estudio de la economía física, es la noción moderna de *tensor.*

Un tensor es una especie de cantidad en la que las relaciones dinámicamente conectadas, dentro y entre las multiplicidades extendidas en n *dimensiones, se expresan como una magnitud unificada.*

17. Ver "Archytas From the Standpoint of Cusa, Gauss, and Riemann" (Arquitas desde la óptica de Cusa, Gauss y Riemann), en la entrega 42 de *Riemann a contraprueba de tontos,* por Bruce Director (www.wlym.com).

Aunque existen expresiones matemáticas formales de un tensor, como las que presentan el texto de Eisenhart, y a pesar de que en ocasiones esas fórmulas son útiles, semejantes expresiones en fórmulas no encarnan verazmente la idea de Riemann. Tiene que conquistarse la idea antes que las fórmulas. Como Riemann indicó en la nota anterior, la mejor forma de lograr esto es mediante el uso pedagógico de ejemplos geométricos. En este respecto, Riemann se hace eco de Platón, Cusa y Gauss, quienes pusieron el acento en el uso metafórico de la geometría para comunicar conceptos que yacen fuera del dominio de la percepción sensorial. En tales casos, advirtieron todos, aunque los ejemplos geométricos son indispensables para nuestro entendimiento, representan una guía, no un sustituto, del concepto del cual se generan. En su disertación de habilitación, Riemann hizo una admonición parecida:

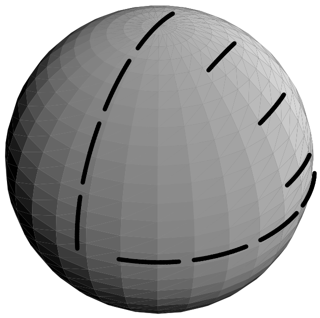
> Dichas relaciones métricas sólo se pueden investigar mediante conceptos abstractos de magnitud, y en conjunto sólo se pueden representar mediante fórmulas; con todo, bajo ciertos supuestos es posible descomponerlas en relaciones que, tomadas aisladamente, admiten una representación geométrica, y de este modo será posible expresar geométricamente los resultados del cálculo. Por tanto, para ganar suelo firme será inevitable una investigación abstracta en fórmulas, pero los resultados de la misma podrán presentarse en ropaje geométrico. Los fundamentos para ambas cosas están contenidos en la famosa memoria del Señor Consejero Privado Gauss acerca de las superficies curvas.

La noción moderna de tensor surge directamente de la idea preliminar de Riemann de la naturaleza de una magnitud extendida en *n* dimensiones. Al desarrollarla, Riemann amplió las nociones de Gauss de curvatura y relaciones métricas de sus superficies doblemente extendidas, a sus multiplicidades extendidas en *n* dimensiones. Desde esta óptica, la curvatura expresa la relación dinámica en interacción de los *n* principios físicos que actúan en la multiplicidad, en tanto que la métrica expresa el comportamiento de las trayectorias de acción mínima —o sea, las geodésicas— que se manifiestan en la multiplicidad. Para captar estos aspectos, uno debe tener en mente la admonición de Riemann. Usa el ejemplo de los conceptos de Gauss de curvatura y métrica como un caso especial, e imagina la extensión de estos conceptos a multiplicidades que no pueden visualizarse de manera directa. Lo que se pierde por no poder visualizar tales multiplicidades desde afuera, se gana al vernos obligados a descubrir su naturaleza desde dentro.

Empecemos por ampliar la idea de una superficie curva a un concepto de curvatura para una magnitud triplemente extendida: por así decirlo, un volumen curvo. Para esto, uno tiene que ser despiadado en rechazar las nociones *a priori* del espacio euclidiano. Semejante volumen curvo no es una gran caja cuadrada en la que la acción curva ocurre, sino una multiplicidad física definida por la acción de tres principios físicos o por un principio que actúa en tres direcciones, como, por ejemplo, en el caso del campo magnético de la Tierra. Si uno se imagina ahora moviéndose alrededor de una multiplicidad tal (como el movimiento de la aguja de una brújula conforme se mueve por el campo magnético terrestre), experimentaría el efecto cambiante de los principios físicos como un cambio de curvatura distintivo en cada una de las tres direcciones (en este ejemplo). Sin importar la capacidad de establecer cualquier representación visual (aun una tan inapropiada como la que acabamos de dar) de esta misma característica en una multiplicidad mayor que tres, es en vano. No obstante, puede formarse en la mente un concepto preciso de tal curvatura múltiplemente extendida.

Riemann generalizó este concepto al mostrar que en cualquier punto en una multiplicidad extendida en n dimensiones hay $n(n-1)/2$ direcciones de superficie distintas que intersecan, cada una con su propia curvatura única, las cuales, juntas, determinan la curvatura de la multiplicidad que actúa en ese punto.[18] Estas curvaturas, las cuales pueden ser completamente diferentes, pueden medirse, como hizo Gauss, como la proporción entre el exceso o defecto angular de un triángulo geodésico, y el área que abarca dicho triángulo.[19] Riemann definió la medida de curvatura a cada punto de la multiplicidad como la magnitud que expresan las $n(n-1)/2$ curvaturas de superficie distintivas en ese punto, una magnitud que ahora se llama *tensor de curvatura de Riemann.* *Este tensor no es solo un número. Es una magnitud que expresa cómo las $n(n-1)/2$ curvaturas distintivas van cambiando a cada punto, y cómo este cambio* **cambia** *de un lugar a otro en la multiplicidad.* Cada curvatura distintiva mide el cambio dentro de una de las superficies que intersecan; pero, así como la magnitud cúbica define la relación entre longitud y área de modo diferente que la cuadrada, el tensor de curvatura de Riemann define cada curvatura constituyente inferior desde la perspectiva de la dinámica de la multiplicidad en su conjunto.

FIGURA 9
Transporte paralelo



En el caso de las multiplicidades doblemente extendidas de Gauss, $n(n-1)/2$ es igual a uno. Por consiguiente, el tensor de curvatura tiene un componente: la medida de curvatura de Gauss como se definió antes.[20] Para una multiplicidad triplemente extendida (un "volumen" curvo), $n(n-1)/2$ es igual a tres. Así, definir la medida de curvatura en un punto de una multiplicidad triplemente extendida exige un tensor que exprese la relación funcional entre las tres funciones que la componen, donde cada una de ellas manifieste la curvatura cambiante de una superficie. El tensor de curvatura, por tanto, expresa la relación cambiante entre estas tres medidas de curvatura *como un solo tipo de función abarcadora.* De nuevo, la tridimensionalidad de esta magnitud no puede expresarse simplemente con un número o con tres medidas individuales de curvatura. Más bien, se necesita una magnitud extendida en n dimensiones o tensor.

Para una multiplicidad cuádruplemente extendida, seis direcciones de superficie intersecarán en cada punto, estableciendo un tensor de curvatura riemanniano que expresa una relación funcional entre seis medidas de curvatura distintas.

Aunque semejante multiplicidad no puede visualizarse de manera directa, con el enfoque de Riemann, su medida de curvatura puede definirse con claridad.

Además de esta noción de curvatura de una multiplicidad extendida en n dimensiones, Riemann definió el concepto de una métrica extendida en n dimensiones. Para esto, amplió la generalización de Gauss de la métrica pitagórica de la geodésica, de las multiplicidades doblemente extendidas a las extendidas en n dimensiones. Recuerda que Gauss demostró que para una multiplicidad doblemente extendida, la longitud de la geodésica la expresaban tres funciones de los dos parámetros que definen la superficie.[21] Esas tres funciones expresan la relación entre la longitud de una geodésica y la curvatura cambiante de la superficie.

Para una multiplicidad triplemente extendida, uno puede imaginar que en vez de que la geodésica cambie con respecto a dos parámetros (superficie diferencial), lo haga con respecto a tres, que forman, por así decirlo, un volumen diferencial. Conforme este volumen diferencial se mueve alrededor de la multiplicidad, la longitud de la geodésica que contiene cambia. Expresar la relación entre la longitud de la geodésica y los tres parámetros que definen el volumen diferencial, exige un tensor que exprese una función entre seis funciones.

De nuevo, con todo lo inadecuada que es esta visualización

---

18. Por tanto, en el ejemplo de un multiplicidad triplemente extendida habría tres superficies que intersecan en cada punto.
19. Tuillio Levi–Cività, un estudiante de Gregorio Ricci, que a su vez fue alumno del colaborador de Riemann, Enrico Betti, planteó más tarde otra manera aun más simple de encontrar la curvatura de un elemento de superficie midiendo el cambio de dirección de un vector, que resulta cuando dicho vector se transporta alrededor de un área pequeña de la superficie, de modo que siempre sea paralelo a sí mismo. Por intuición, pareciera que semejante acción no alteraría la dirección del vector. Eso es verdad en una superficie plana; pero, si la superficie tiene alguna curvatura en lo absoluto, ésta cambiará la dirección (ver **figura 9**).
20. Es importante notar que ese componente expresa la relación dinámica entre los dos parámetros que definen la superficie.
21. Denotados E, F, y G por Gauss.

para una multiplicidad triplemente extendida, aun tal visualización indirecta es imposible para multiplicidades cuya extensión es mayor de tres. Empero, Riemann formuló un concepto preciso de semejante métrica extendida en *n* dimensiones. Demostró que en una multiplicidad extendida en *n* dimensiones hay, en principio, $n(n+1)/2$ funciones de los *n* parámetros físicos de la multiplicidad, que se necesitan para definir la métrica.[22] Desde entonces, estas $n(n+1)/2$ funciones han venido a conocerse como el *tensor métrico de Riemann.* Expresan el efecto cambiante de la curvatura de la multiplicidad sobre las mediciones de la longitud de las líneas geodésicas. Los ejemplos anteriores, aunque algo abstractos, brindan una base para formar un concepto pedagógico (a diferencia de meramente formal) de los tensores métricos y de curvatura de Riemann. *Definida con amplitud, la noción de un tensor riemanniano expresa un conjunto definido de relaciones funcionales entre los* n *principios físicos que actúan juntos para producir el efecto total en una multiplicidad de acción física extendida en* n *direcciones.*

Es más, la extensión de Riemann de las nociones de Gauss de curvatura a las multiplicidades extendidas en *n* dimensiones, proporciona un medio para determinar las características físicas de dicha multiplicidad a partir de sus expresiones infinitesimales; o sea, desde dentro de la multiplicidad.

Riemann no sólo desarrolló la forma de los tensores pertinentes, también proporcionó un ejemplo experimental y elaboró un método para su cálculo. En un trabajo que envió a la Academia de Ciencias de París en 1861, en respuesta a la pregunta de un concurso sobre la determinación del flujo de calor en un cuerpo sólido homogéneo en tanto función del tiempo y otras dos variables, Riemann ideó un ejemplo físico de la curvatura de una multiplicidad extendida en *n* dimensiones. En dicho trabajo, Riemann escribió:

> La expresión
>
> $$\sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}\, ds_i\, ds_j}$$
>
> puede considerarse como un elemento lineal en un espacio general extendido en *n* direcciones que yace fuera de nuestra intuición. Si en este espacio trazamos todas las líneas más cortas posibles desde el punto $(s_1, s_2, \ldots s_n)$, cuyas direcciones iniciales las caracterizan las relaciones: $\alpha ds_1 + \beta s_1$; $\alpha ds_2 + \beta s_2$; $\ldots$; $\alpha ds_n + \beta s_n$ (donde α y β son cantidades arbitrarias), estas líneas forman cierta superficie que puede pensarse como ubicada en el espacio acostumbrado de nuestra intuición. En ese caso, la expresión será una medida de la curvatura de la superficie en el punto $(s_1, s_2, \ldots s_n)$.[23]

El trompo, del que hablamos en la última entrega de esta serie, ofrece otro ejemplo pedagógico de una multiplicidad de acción física en la que necesitamos los tensores para expresar dicha acción.[24] Como hemos probado antes, el movimiento del trompo es resultado de su relación cambiante con el potencial gravitatorio y el momento angular que genera al girar. El efecto de cada uno lo expresa un vector que abarca tres funciones que lo integran. Así, expresar el movimiento del trompo requiere un tensor que represente la relación cambiante de ambos vectores. Este tensor expresa la multiplicidad física en la que gira el trompo, lo cual, como el propio Félix Klein se vio obligado a admitir, representa una multiplicidad antieuclidiana. Pero, a diferencia de Klein, quien con pompa insistía que es puramente matemática y carece de importancia metafísica, esta multiplicidad antieuclidiana es la única con una realidad tanto física como metafísica.

Uno de los ejemplos más famosos de una aplicación de tensores de tipo riemanniano en la física, es el uso que Albert Einstein hizo de ellos en su teoría general de la relatividad, en la cual expresó las relaciones gravitatorias del espacio–tiempo físico mediante un complejo de tensores.

Sin embargo, los ejemplos citados son apenas un atisbo. Ejemplifican las investigaciones de las multiplicidades físicas en las que los principios que actúan se limitan a aquellos asociados con el dominio abiótico. Los principios físicos de los dominios biótico y cognoscitivo también actúan en las multiplicidades extendidas en *n* dimensiones que estudia la ciencia de la economía física. Es más, las relaciones entre estos principios *son dinámicamente antientrópicos. De modo que se necesita ampliar los tensores de tipo riemanniano para expresar la relación dinámica entre multiplicidades de grados cada vez mayores de extensión.* Empero, antes de delinear estos requisitos es necesario considerar la otra cara del asunto que Riemann investigaba.

La topología física de las multiplicidades autolimitadas

En la explicación anterior de la forma generalizada de la geometría diferencial, ampliamos la noción de curvatura física a multiplicidades definidas por *n* principios físicos e investigamos cómo la característica cobra expresión en lo infinitesimalmente pequeño. Esta clase de investigación es fundamental para el progreso científico, porque es en las regiones infinitesimales que se miden las características de las relaciones métricas y de curvatura, y es a partir de las anomalías descubiertas por estas mediciones que se descubre la existencia y naturaleza de principios físicos

---

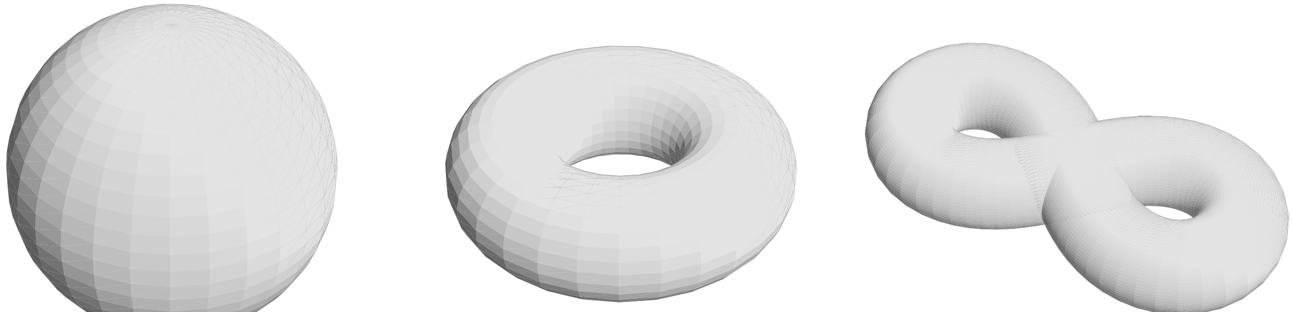
22. Estas funciones son la extensión de las funciones E, F, y G de Gauss a las superficies.

23. *Mathematische Werke,* de Bernhard Riemann (Berlín: 1990), pág. 435. Traducción de *Mathematics of the 19th Century* (Matemáticas del siglo 19), de Kolmogorov, Yushkevich (Berlín: Birkhauser Verlag, 1996), pág. 85.

24. Ver "View from the Top" (Una vista desde arriba del trompo), en la entrega 67 de *Riemann a contraprueba de tontos,* por Bruce Director (www.wlym.com).

FIGURE 10

Topologías trascendentales



Trascendental simple　　Trascendental elíptica　　Trascendental hiperelíptica

nuevos. Como puso de relieve Riemann en su disertación de habilitación, "el conocimiento de la conexión causal de los fenómenos está fundada esencialmente en la precisión con la que la seguimos hasta lo infinitesimalmente pequeño".

Sin embargo, Riemann entendía que estas características en lo pequeño no las determina del todo la acción en las regiones locales de una multiplicidad física. Tal como hechos singulares que ocurrieron hace miles de años o una intención de producir un resultado de aquí a dos generaciones determinan hoy las acciones inmediatas en la sociedad, las características locales de una multiplicidad física reflejan la naturaleza global de la multiplicidad. Riemann demostró que estas características globales las definen factores tales como el número de singularidades y las condiciones en el límite de la acción. De hecho, aunque las mediciones locales de relaciones métricas y de curvatura pueden variar bastante dentro de una multiplicidad, hay ciertas características globales que ejercen un efecto determinante en su significado físico. Riemann decía que la investigación de estas características globales pertenecía al dominio del *"análisis situs"*. Más tarde, otro de los estudiantes de Gauss, Johann Listing, adoptó el término "topología" (de la palabra griega *topos,* que significa posición) para este estudio. Como se hará más patente a continuación, es sólo al tomar en cuenta la relación entre las características topológicas y locales, que es posible conocer algo fundamental sobre el proceso físico que se investiga.

En su disertación de habilitación y en el extracto arriba citado, Riemann indicó que el marco para una investigación de esta relación entre las características locales y topológicas se encuentra en su estudio de las funciones complejas, en las que expresó la noción de una multiplicidad multiconexa autolimitada en la forma de lo que desde entonces vino a conocerse como superficies riemannianas. Riemann fue pionero en este campo, bajo la dirección de Gauss, en su disertación doctoral de 1851. Luego, siguiendo su disertación de habilitación, Riemann profundizó sus investigaciones en sus famosos estudios de las funciones abelianas, las superficies mínimas y las hipergeometrías.[25]

Aunque el descubrimiento de Riemann en este campo es un avance único en el conocimiento, sus raíces se remontan a Platón y los pitagóricos, quienes insistían que toda investigación del universo debía partir de un concepto de la naturaleza de todo él. En el *Timeo,* Platón expresó esta naturaleza como el concepto monoteísta de que el universo es una sola creación de un Creador único. Platón afirma que la expresión geométrica de semejante universo autolimitado cobraría una forma esférica:

> La figura apropiada para el ser vivo que ha de tener en sí a todos los seres vivos, debería ser la que incluye todas las figuras. Por tanto, lo construyó esférico, con la misma distancia del centro a los extremos en todas partes, circular, la más perfecta y semejante a sí misma de todas las figuras, porque consideró muchísimo más bello lo semejante que lo disímil. Por múltiples razones culminó su obra alisando toda la superficie externa del universo.[26]

Riemann reafirmó esta noción de un universo finito autolimitado en su disertación de habilitación, sólo que desde la perspectiva superior de su noción de una multiplicidad múltiplemente extendida:

> La ilimitación del espacio posee, por tanto, mayor certeza empírica que cualquier experiencia exterior.

25. Ver *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Riehe . . . ; Theorie der Abel'schen Functionen; Über die Flache vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung,* en *Mathematische Werke,* de Bernhard Riemann (Leipzig, 1892).

26. *Timeo o de la naturaleza,* de Platón (edición electrónica de www.philosophia.cl/Escuela de Filosofía Universidad ARCIS).

> Pero de aquí no sigue en absoluto la infinitud; antes bien, si se presupone independencia de los cuerpos respecto a la posición, o sea, si se le adjudica una medida de curvatura constante, el espacio deberá ser necesariamente finito tan pronto como esa medida de curvatura tenga un valor positivo, por pequeño que sea. Al prolongar las direcciones iniciales que yacen en un elemento de superficie hasta obtener líneas mínimas, obtendríamos una superficie ilimitada con curvatura constante positiva, es decir, una superficie que, en una variedad plana tridimensional, tomaría la forma de una superficie esférica y que, consiguientemente, es finita.

Platón subrayó que la característica topológica de un universo autolimitado también determina otra que la ciencia moderna identificaría como "cuantificación". Desde la perspectiva de Platón, esto se expresa por la singularidad de los sólidos regulares platónicos —que son cinco— y los semirregulares arquimedianos, como las divisiones únicas de la superficie esférica.[27] Hubo más avances en este campo con las investigaciones de Luca Pacioli y Leonardo da Vinci, en particular por el acento que este último le imprimió al significado de estas cuestiones para la distinción entre los dominios abiótico y biótico. El descubrimiento de Kepler de una nueva forma de sólido regular —los llamados sólidos estrellados de Kepler y Poinsot— y el contemporáneo de Napier del *pentagramma miríficum,* representaron nuevos avances significativos a esta comprensión. Con los estudios cristalográficos de los que informa en "El copo de nieve de seis ángulos", Kepler amplió esta noción al dominio de las multiplicidades triplemente extendidas,[28] como indicaría luego Riemann en la sección antes citada de su disertación de habilitación.

Pero, desde la construcción de Arquitas para doblar el cubo, hasta la determinación de Kepler de la naturaleza elíptica de las órbitas planetarias, las pruebas experimentales indicaban que la acción física estaba limitada por una forma de acción superior a la que expresaban estos conceptos de acción esférica.

La solución a esta paradoja empezó a ver la luz a más cabalidad con descubrimientos tales como la visión renovada de Gauss de los sólidos regulares y semirregulares desde la perspectiva de los principios generales de curvatura que acabamos de ver, su descubrimiento de la conexión entre el *pentagramma miríficum* de Napier y las funciones elípticas, su trabajo sobre el significado de la media aritmético–geométrica, y las implicaciones de su discernimiento de la división del círculo, la elipse y los residuos bicuadráticos.

27. Ver "Archimedean Polyhedra and the Boundary: The Missing Link" (Los poliedros arquimedianos y el límite: El eslabón perdido), por Hal Vaughn, en la edición de verano de 2005 de la revista *21st Century, Science & Technology.*
28. Ver "El copo de nieve de seis ángulos y la geometría pentagonal", por Ralf Schauerhammer, en *Resumen ejecutivo* de la 2ª quincena de marzo de 2004 (vol. XXI, núm. 6).

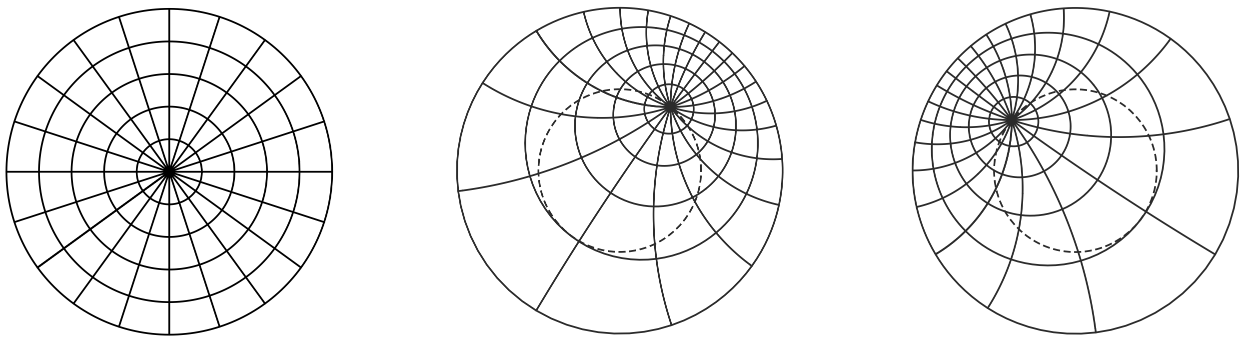
Estos descubrimientos presagiaron la penetración de Riemann de la naturaleza más profunda de los efectos topológicos, misma que desarrolló durante su estudio de las funciones de las superficies mínimas, abelianas e hipergeométricas.[29] En estos estudios, Riemann elaboró el concepto de una noción superior de autolimitación, la cual se expresaba en la sucesión de multiplicidades relativamente autolimitadas asociadas con las superficies de Riemann que se generaban con respecto a la clase extendida de las funciones trascendentales conocidas como abelianas. Riemann mostró que cada especie de trascendental está asociada con una densidad creciente de singularidades, lo cual se expresa en la superficie de Riemann correspondiente mediante un cambio en sus características topológicas (ver **figura 10**). Ésta es la noción riemanniana de autolimitación que representa el enfoque pertinente para la ciencia física moderna.

Riemann insistía que la característica esencial de estas superficies riemannianas es su expresión de lo que llamó el "principio de Dirichlet",[30] un principio físico que adoptó de su maestro, Lejeune Dirichlet, a cuyas disertaciones sobre la teoría de potencial de Gauss asistía en la Universidad de Berlín. En esos estudios, Gauss y Dirichlet generalizaron la obra inicial de Leibniz sobre dinámica por medio del estudio de la gravedad, el magnetismo y la electricidad. Al igual que Leibniz, Gauss y Dirichlet pusieron de relieve que las características específicas de una acción física son el efecto de las propiedades de acción mínima "potencial" de los principios físicos que la gobiernan. Gauss definió como la "función de potencial" aquélla que expresa la curvatura característica que manifiestan estas propiedades de acción mínima. En otras palabras, los principios físicos tales como la gravedad, el magnetismo y la electricidad establecen una multiplicidad *anti*euclidiana cuya naturaleza puede expresarse en los principios generales de curvatura que había formulado Gauss. En las disertaciones a las que Riemann asistía, Dirichlet recalcó que esta función de potencial la expresaba un conjunto de funciones armónicas —o sea, cuyo ritmo de cambio de curvatura es igual en magnitud y perpendicular en dirección—, y que éstas necesariamente expresaban las propiedades de acción mínima del potencial.

Es más, Gauss y Dirichlet reconocieron que las características específicas de una función de potencial las determinaban las condiciones en el límite de la acción. Por ejemplo, la superficie de un imán o de la Tierra, en el caso del magnetismo o la gravedad, o las condiciones en el límite de un cuerpo conductor de calor, como en el ejemplo desarrollado

29. Ver Riemann, *op. cit.;* Bruce Director, *Riemann a contraprueba de tontos,* entregas 52, 54, 61 y 64.
30. Ver "Vernadsky y el principio de Dirichlet", por Lyndon H. LaRouche, y "El 'principio de Dirichlet' de Bernhard Riemann", por Bruce Director, en *Resumen ejecutivo* de la 1ª quincena de agosto de 2005 (vol. XXII, núm. 15).

FIGURA 11
El principio de Dirichlet



por Riemann en la cita anterior. A partir de esto, Dirichlet demostró que las características de la función de potencial en toda la multiplicidad podían especificarlas las condiciones límite, y cambiar cuando dichas condiciones variaran (ver **figura 11**).

Riemann fue aun más allá. Reconoció que el principio de Dirichlet expresa una característica única de las funciones de una variable compleja. Cuando tales funciones se representan con superficies de Riemann, el principio de Dirichlet se extiende para incluir multiplicidades físicas con una densidad de singularidades en ascenso, como lo demostró Riemann en su obra sobre las funciones abelianas e hipergeométricas.

Esto implicó que Riemann pudiera demostrar la relación entre las características de curvatura en lo infinitesimalmente pequeño y las globales de la multiplicidad, en particular el número, características y densidad de las singularidades.

Esto puede ilustrarse de modo pedagógico con un ejemplo. Primero, toma la esfera, que es la forma de la superficie de Riemann para las funciones trascendentales simples asociadas con las circulares, las hiperbólicas y las exponenciales. Cada función tal define un conjunto diferente de parámetros gaussianos desde los cuales se determinan las relaciones métricas. Sin embargo, las relaciones métricas sólo se aplican a situaciones locales. Por ejemplo, sólo existe una geodésica entre dos puntos cualquiera, únicamente si dichos puntos están cerca uno del otro. Pero si son los polos, hay un número infinito de geodésicas que los conectan. Riemann demostró que sobre una superficie esférica siempre existen, de manera intrínseca, dos polos tales. Riemann definió tales superficies como “simplemente conectadas”. Además, Riemann mostró que ésta es una característica de cualquier superficie simplemente conectada y, como toda superficie semejante puede proyectarse sobre la esfera sin alterar sus relaciones armónicas (es decir, conformemente), esta característica es “topológica” (o sea, independiente de las relaciones métricas particulares). No obstante, determina las condiciones en las cuales existen dichas relaciones métricas.

Observa ahora el caso del toro, que es la superficie asociada con las trascendentales elípticas. Aquí ocurre una situación completamente diferente. Como demostraron Gauss y Riemann, estas especies de trascendentales expresan un poder superior de acción física que las trascendentales simples. Este poder superior lo expresa la densidad en aumento de singularidades, que en la superficie de Riemann se manifiesta como un cambio en las características topológicas de la multiplicidad. Riemann denotó superficies tales como el toro como “doblemente conectadas”. Sin embargo, a diferencia del caso de las multiplicidades simplemente conectadas, las doblemente conectadas no pueden, en general, proyectarse conformemente una sobre la otra. Esto significa que la multiplicidad de las doblemente conectadas tiene, en cierto sentido, un grado mayor de “cuantificación”, del modo que Gauss exploró este concepto en su investigación de la media aritmético–geométrica.[31] Pero, como quedará claro a continuación, este cambio de topología también está asociado con un cambio fundamental en la naturaleza global de la curvatura de la multiplicidad.

Este cambio se aclara cuando el concepto de curvatura de Gauss se combina con la noción de las superficies de Riemann, tal y como éste lo hizo en su estudio de las superficies mínimas. Las superficies mínimas, tales como la catenoide, expresan una característica física de acción mínima.

---

31. Ver *Nachlass zur Theorie Des Arithmetisch–Geometrischen Mittels und der Modulfunktion,* übersetzt und herausgegeben von Dr. Harald Geppert, por Carl Gauss (Leipzig: Ostwaldt’s Klassiker der Exakten Wissenschaften, Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H. 1927); y “Gauss’s Arithmetic–Geometric Mean: A Matter of Precise Ambiguity” (La media aritmético–geométrica de Gauss: Una cuestión de ambigüedad exacta), en la entrega 66 de *Riemann a contraprueba de tontos,* por Bruce Director (www.wlym.com).

FIGURA 12
Mapas conformes de Gauss

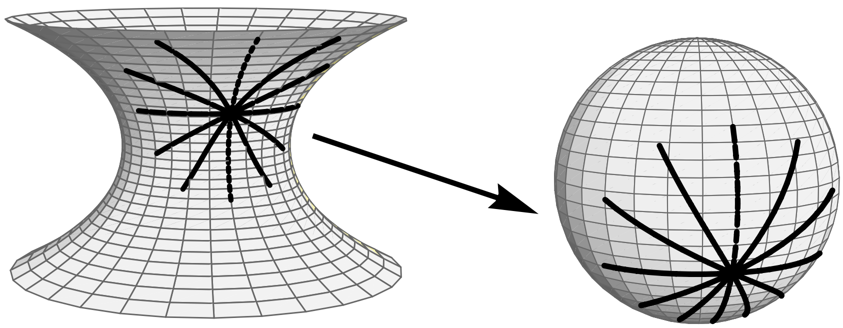
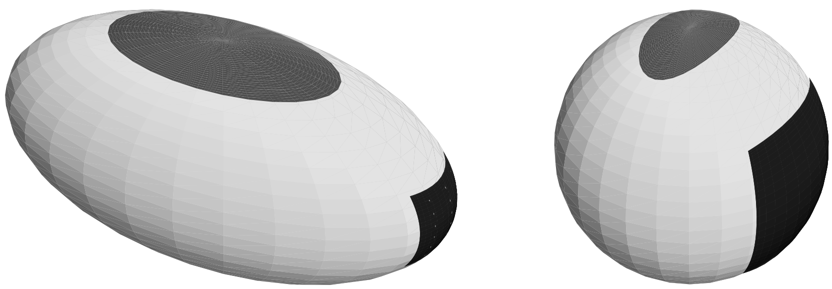


FIGURA 13
Mapas de área de Gauss



Esta característica la manifiesta el hecho de que la curvatura media de una superficie mínima es constante en todas partes. Riemann mostró que los mapas de Gauss de superficies mínimas son conformes con la superficie original (ver **figura 12**). Como sus superficies se generaban de funciones complejas, reflejando las características armónicas de las funciones de potencial físico de Gauss y Dirichlet, también tienen la característica de que implican un mapa de Gauss correspondiente.

Pero una penetración aun más profunda sale a relucir cuando ahondamos en la conexión topológica entre las superficies de Riemann y los mapas de Gauss. Comienza esta investigación echando un vistazo a la curvatura de superficies simplemente conectadas. Como vimos antes, las partes de estas superficies que son más curvas generarán áreas más grandes sobre el mapa de Gauss, y las que son menos curvas, áreas más pequeñas (ver **figura 13**). Pero, aunque la curvatura puede variar mucho de un lugar a otro sobre la superficie, la curvatura total de la superficie, o sea, el mapa de Gauss de toda la superficie, ¡será la misma para cada superficie simplemente conectada!

Esto parecería llevar a una conclusión devastadora, si nos apegáramos a la idea de que la forma del universo es simplemente esférica, pues en tal caso la curvatura total del universo sería fija. Así, la curvatura local podría cambiar, pero semejantes cambios no podrían afectar la curvatura general del universo mismo. Esta idea corresponde al dogma aristotélico de que, aunque el cambio puede ocurrir en lo pequeño, en el plan general del universo ningún cambio fundamental es posible. Esta visión. por supuesto, la contradicen las pruebas experimentales de la ciencia física y la historia del hombre, cuyos descubrimientos y aplicaciones de principios universales han traído cambios que sólo pueden expresarse como un cambio en la curvatura total del universo.

Pero, por fortuna, como demostró Riemann, nuestra mente no se limita a multiplicidades simplemente conectadas. Fundados en sus descubrimientos, podemos formar un concepto más propio de la naturaleza *antientrópica* del universo real: *una sucesión de multiplicidades de conectividad creciente asociada con un cambio en aumento de la curvatura total de la multiplicidad.*

Ahora observa el mapa de Gauss para el toro como un ejemplo de una multiplicidad doblemente extendida. El exterior del toro tiene una curvatura positiva, y el interior, negativa. Los círculos que conforman el límite de las dos regiones tienen curvatura cero. Así, la curvatura del toro es más compleja que una superficie simplemente conectada. Esto queda claro con los mapas de Gauss. El exterior del toro se proyecta como una esfera entera, y el interior también, sólo que en la dirección contraria (ver **figura 14**). Los círculos límite se proyectan como los polos. De este modo, ¡el mapa de Gauss del toro es en sí mismo una superficie de Riemann con una curvatura total de cero!

Esto nos da un mejor concepto de curvatura cero que la idea de lo plano. En vez de pensar en la medición de la curvatura cero como el plano euclidiano, podemos concebirla como el efecto total de una multiplicidad con cantidades iguales de curvatura positiva y negativa. La curvatura local en tal multiplicidad puede ser negativa o positiva, como es posible también para una superficie simplemente conectada. Pero el significado de la curvatura local en cada multiplicidad es totalmente diferente.

FIGURA 14
Mapa de Gauss de doble capa

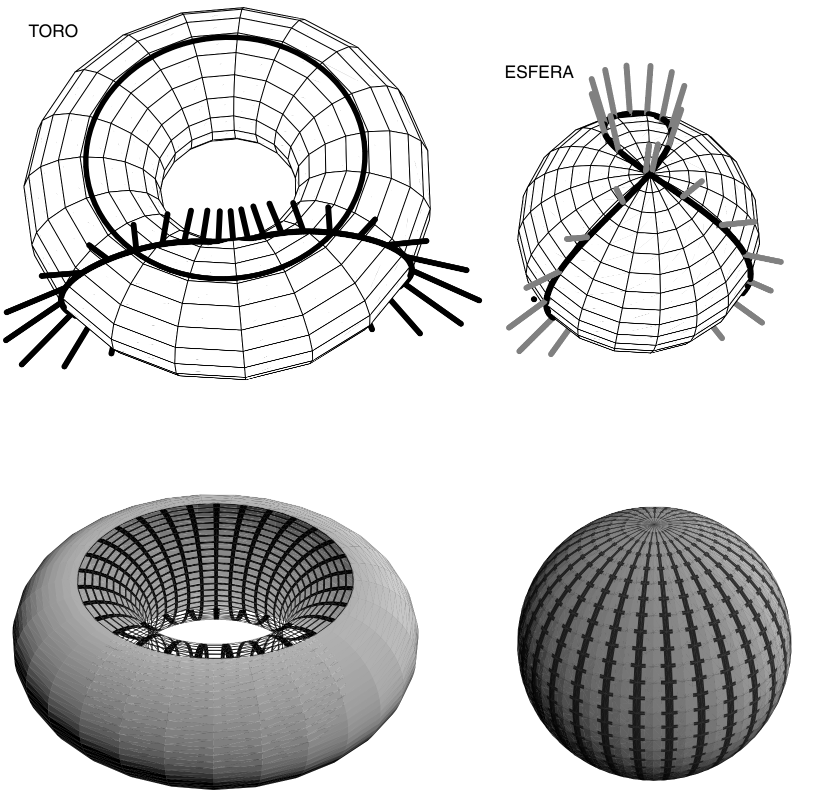
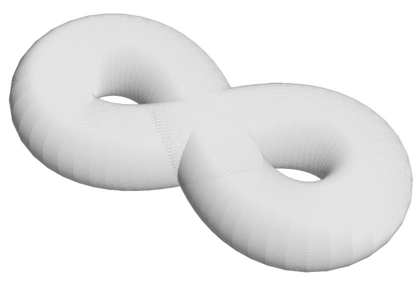


FIGURA 15
Trascendental hiperelíptica



De esta comparación de una superficie simplemente conectada con una curvatura total igual a una superficie esférica, y del toro con una curvatura total de cero, pareciera que no vamos en dirección a un concepto de un universo con la posibilidad de tener una curvatura siempre cambiante. Pero esta apariencia se remedia cuando vemos los mapas de Gauss para una multiplicidad triplemente conectada, asociada con la siguiente especie superior de trascendental, la hiperelíptica (ver **figura 15**). Semejante multiplicidad tiene una región con curvatura positiva y dos con negativa. Así, el mapa de Gauss será una superficie esférica positiva y dos negativas, para una curvatura neta total de superficie esférica de -1. Si pensamos ahora en la multiplicidad entera de las superficies de Riemann, vemos una multiplicidad de multiplicidades de creciente densidad de singularidades, y con una curvatura total *discontinuamente* más *negativa* cada vez. Tales discontinuidades entre los cambios en la curvatura total también corresponden a un cambio que resulta de introducir un principio del todo nuevo que actúa sobre la multiplicidad. Dicho cambio produce otro correspondiente en la cuantificación de la multiplicidad. Esta idea, en combinación con la de Riemann de las magnitudes extendidas en *n* dimensiones, los *tensores,* es el concepto básico necesario para abordar una investigación de la economía física.

Sin embargo, eso requiere desarrollar una forma aun superior de tensor.

Los tensores riemannianos en la economía: un enfoque preliminar

Con todo lo antes visto en mente, puede intentarse un esbozo de un enfoque preliminar para la construcción de magnitudes como de tensor de corte riemanniano, que sean adecuados para expresar procesos físico–económicos. Los principios que fundamentan esto los ha desarrollado LaRouche con amplitud en diversas instancias, la más pertinente de ellas su “Dinámica y economía” (*Resumen ejecutivo* de la 1ª quincena de septiembre de 2006).

Tales magnitudes múltiplemente extendidas han de expresar la interrelación de los principios abióticos, bióticos y cognoscitivos como una dinámica de la interacción social entre seres humanos, que en sí misma está actuando sobre los dominios abiótico, biótico y cognoscitivo. Esta dinámica no puede tratarse como una interacción fija o siquiera alineal, sino como una dinámica que está, ella misma, cambiando debido a la acción voluntaria de los poderes creativos del hombre. De este modo, la multiplicidad físico–económica de acción ha de considerarse como *la multiplicidad del potencial creciente de producir ideas.*

En tanto tal, ninguna forma de una serie o matriz de datos y funciones (incluso las alineales en lo algebraico), tales como las que indica el tratamiento matemático formal de los tensores, es adecuada. Más bien, estas cantidades físico–económicas estilo tensor las expresa mejor la forma de animaciones que especifica LaRouche.

Por ejemplo, el principio de la gravitación universal no puede expresarse como una serie de relaciones matemáticas, ni en la forma que los libros científicos modernos presentan como las "leyes de Kepler", ni, con más falsedad, como una consecuencia de la forma degenerada de la formulación de Newton del inverso del cuadrado. Cualquier expresión veraz del principio de gravitación universal tiene que presentarse como un descubrimiento que actúa para cambiar la dinámica del universo. Lo que debe tomarse en cuenta, es que la gravitación actuaba como un principio físico en y sobre el universo desde antes de que Kepler la descubriera y elaborara. *Pero, con el descubrimiento de Kepler y su propagación a lo largo de generaciones sucesivas, el* **poder** *del principio de la gravitación cambió, porque ahora podía actuar sobre el universo desde el dominio de poder superior de la interacción cognoscitiva humana que, en retrospectiva, redefine el principio de la gravitación universal sin descubrirlo como depositario del potencial no concretado de producir el efecto intencional de su descubrimiento.*

Esta clase de cambio debe expresarse en las nuevas magnitudes como de tensor, al modo de un cambio *discontinuo* en la curvatura característica total de la multiplicidad de la economía física, de la variedad asociada con el tratamiento que Riemann le da a semejante cambio de poder con respecto a las trascendentales abelianas.

Dicho cambio en la curvatura total está asociado con uno en la curvatura infinitesimal o local de la multiplicidad de los procesos físico–económicos. Establecer una noción de curvatura local exige un rechazo completo y total de cualquier noción estilo euclidiano de tiempo absoluto. Hechos muy separados por una medida de tiempo son, no obstante, simultáneos con respecto a otra. Por ejemplo, al conflicto de la antigua Atenas entre Sócrates y los sofistas lo separan de los acontecimientos actuales más de dos mil revoluciones de la Tierra alrededor del Sol. Sin embargo, los efectos de esos sucesos actúan hoy en el universo con tanta eficiencia como entonces. De modo parecido, los actos intencionales aún por ocurrir, tal como el establecimiento exitoso de una colonia humana en Marte, tiene un efecto inmediato en el comportamiento de la actividad humana en la Tierra hoy. Por consiguiente, un concepto de curvatura físico–económica local debe considerar, de manera simultánea, que los actos tienen *tanto* una amplia separación como una virtual instantaneidad.[32]

La función antes señalada de la cognición humana en el desarrollo del universo la expresa el poder creciente del hombre en y sobre los dominios abiótico, biótico y cognoscitivo mediante el progreso en la ciencia y el arte. Así, el desarrollo del universo entero es el efecto del potencial cada vez mayor de los poderes creativos del hombre. En consecuencia, el progreso físico–económico puede expresarse por dicho potencial creciente para generar ideas creativas.

Sin embargo, tales ideas no se generan en todo el universo, sino por su relación dinámica con los poderes creativos *voluntarios* soberanos de la mente humana individual. Esta "acción local" afecta y es afectada por el potencial creativo total de la humanidad y, en potencia, del universo entero. Desde la perspectiva de la economía física, esto lo expresa la relación físico–económica entre el hogar y la economía en su conjunto.

La actividad físico–económica primordial de un hogar es su capacidad de producir, el *potencial* para producir ideas creativas entre los miembros de dicho hogar. Ese potencial es una función de las condiciones físico–económicas; por ejemplo, la infraestructura física (tal como el agua, la energía y el transporte), el nivel tecnológico y la infraestructura social (tal como la educación, la cultura y la salud) disponibles para los miembros de ese hogar, por la acción de principios universales que actúan en este momento "local" desde todo el espacio–tiempo.

De esta manera, la cantidad como de tensor asociada con la medición de la curvatura físico–económica local ha de expresar la intersección, en un punto en la multiplicidad físico–económica, de las curvaturas de los principios físicos y culturales que interactúan de forma dinámica desde la totalidad del tiempo, y que afectan y son afectadas por los poderes creativos de los individuos de ese hogar.

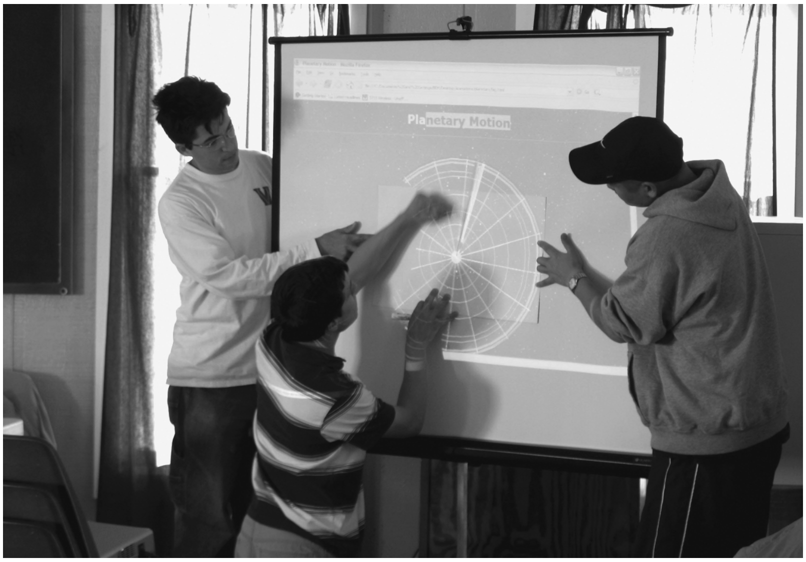
Parecería que esta cantidad como de tensor contiene tantos componentes que su forma real es prácticamente imposible de expresar. Sin embargo, esto es verdad sólo si procuramos una expresión matemática formal. Tanto Gauss como Riemann demostraron que sus funciones de curvatura podían cobrar formas en extremo complicadas cuando se expresaban en fórmulas. Por ende, buscaron y encontraron medios para expresar las características esenciales en un ropaje físico–geométrico. Los medios equivalentes para estas cantidades físico–económicas como de tensor son las animaciones físico–económicas diseñadas por LaRouche.

Además de la curvatura, las relaciones métricas de la economía física también pueden expresarse mediante magnitudes como de tensor. Esto también se ilustra mejor con un ejemplo.

Fíjate en el nivel de transporte de que disponen los hogares, lo cual define cierta relación métrica entre los hogares y la economía como un todo, expresado como una geodésica en el espacio–tiempo físico–económico. Esto puede expresarse, en principio, por la relación entre las diferentes formas de transporte acuático, ferroviario, de caminos, aéreo, pedestre, ciclista, etc., a las que puede acceder ese hogar, lo cual define una trayectoria de acción mínima para dicha relación. Pero la importancia económica de estas formas de transporte es relativa a su relación con la organización de toda la economía.

Para expresar esto, uno tiene que observar, como sugirió LaRouche en su "Rebuilding the U.S.A.: Travel Among Cities" (Reconstruyamos a EUA: El tráfico interurbano) del 15 de diciembre de 2005 (ver *EIR* del 30 de diciembre de 2005), el desarrollo del transporte de Norteamérica, desde

32. El paradigma para semejante noción de tiempo es la idea de Kepler sobre éste con respecto a las órbitas planetarias. La acción planetaria en cualquier instante sólo se conoce como su relación con la órbita entera. El principio de Kepler de las áreas iguales expresa esta noción de tiempo.



Miembros del Movimiento de Juventudes Larouchistas exploran las leyes de Kepler del movimiento planetario en una escuela de cuadros en Washington, D.C. (Foto: Adam Sturman/EIRNS).

principios del siglo 17 en adelante. La geografía física de Norteamérica a principios del siglo 17 puede caracterizarse por cierto nivel de conectividad asociado con las bahías, estuarios y sistemas hídricos de la costa este, la cordillera de los Apalaches, los Grandes Lagos, y los sistemas hídricos Ohio y Misisipí–Misurí. Este nivel de conectividad es resultado de la acción biogeológica, desde comienzos de la última glaciación.

Esta geografía físico–económica entraña una conectividad continental potencial que sólo puede realizarse por intervención del hombre. La realización de dicho potencial empezó con la construcción de sistemas hidráulicos y de caminos en las regiones orientales, seguida por los primeros intentos por construir los sistemas que conectaran la región costera con el interior, y todos los sistemas hídricos de los valles de los ríos Ohio y Misisipí, y con los Grandes Lagos.

La posibilidad de hacerlo dependía de la aplicación de los poderes creativos del hombre a la transformación de la actividad biogeológica, como lo ejemplifica la construcción de las fundidoras de hierro de Saugus en la Colonia de la Bahía de Massachussets en el siglo 17. Estas instalaciones manufactureras integradas usaron el agua y la capacidad biológica de la región para transformar el mineral de hierro en herramientas, clavos y otros productos útiles. La creación y aplicación de tales productos "abióticos" de la acción biológica y cognoscitiva transformó las características biogeológicas de la zona. Esta transformación fue resultado y parte integral del proceso que generó una nueva organización del hombre: la república estadounidense, que hizo posible y necesario un aumento de la conectividad físico–económica del continente. Este incremento de la conectividad, que se efectuó por medio de esta interacción entre procesos abióticos, bióticos y cognoscitivos, produjo un aumento correspondiente en el potencial de elevar la conectividad físico–económica.

La introducción del ferrocarril alteró este potencial de manera drástica, no como un sustituto de las hidrovías y caminos, sino como una transformación de su relación con una forma superior de conectividad físico–económica. La culminación subsiguiente del ferrocarril transcontinental y el desarrollo de un sistema continental de autopistas y transporte aéreo, intensificaron aun más la actividad físico–económica. Esta conectividad mayor ha de verse a la luz de los aumentos correspondientes en la generación de energía, la locomoción, etc.

Más aun, esta conectividad acrecentada debe verse también con respecto a la intención de la cual es efecto. Por ejemplo, el desarrollo del sistema de autopistas interestatales como suplemento de un sistema nacional de transporte ferroviario, acuático y aéreo, al unir los pequeños, medianos y grandes centros agroindustriales concentrados que creó la movilización económica del presidente Franklin D. Roosevelt a mediados del siglo pasado, define cierto aumento cualitativo de la conectividad económica. Pero, como elemento auxiliar en un aumento súbito de los valores inmobiliarios, deviene en lo que se ha convertido: un virtual estacionamiento de costa a costa, en el que la mayoría de los estadounidenses desperdicia miles de millones de horas–hombre al día, disminuyendo así la conectividad físico–económica del continente.

Es más, al considerar este sistema continental de transporte como parte de una red global cuyo efecto intencional es aumentar la conectividad físico–económica de la humanidad para el desarrollo de los continentes de la Tierra, e integrarlo a la creación de un sistema de transporte que enlace estas partes de la Tierra con el espacio cercano, la Luna, Marte y más allá, se concreta una calidad de conectividad físico–económica aun mayor, con el efecto correspondiente sobre el potencial físico–económico de los miembros individuales de la sociedad para producir ideas creativas.

Estos cambios se reflejan como un cambio correspondiente en las relaciones métricas del espacio y el tiempo físico–económicos, que se manifiesta mediante un cambio en las geodésicas que expresan las trayectorias de acción mínima en la economía física. Este cambio define la clase de características que ha de expresarse con un tensor métrico del espacio–tiempo físico–económico.

Los únicos medios apropiados para expresar semejantes relaciones son magnitudes como de tensor que sustituyen a los tensores de la variedad riemanniana, cuyo desarrollo, con las implicaciones correspondientes para las ciencias física y biológica, se ubican a la vanguardia de la ciencia hoy.

—Traducción de Manuel Hidalgo Tupia.